I) Recherche d'équilibre : nombres sur le fil [National 2025]

On rappelle que pour tout entier naturel non nul m, on a $1+2+3+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$, et que plus généralement, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$, $\quad (n+1)+(n+2)+(n+3)+\cdots+(n+b)=\dfrac{b(2n+b+1)}{2}$.

Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un **nombre équilibré** si il existe un entier naturel non nul b tel que : $1+2+3+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+b)$. Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la **balance** de l'entier n.

Exemple 35 est un nombre équilibré, car : $1+2+3+4+\cdots+34=595$ et $(35+1)+(35+2)+\cdots+(35+14)=595$. La balance de 35 est égale à 14.

1. Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance. Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.

1) Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits

On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c=e^2$. Ainsi, $16=4^2$ et $36=6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18. Soit n un entier au moins égal à 2.

2. On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.
   - **a.** Montrer que $n^2-n=2bn+b^2+b$ puis que $b=\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$.
   - **b.** En déduire que $8n^2+1$ est un carré parfait.
3. On suppose dans cette question que $8n^2+1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.
   - **a.** Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b=\frac{-(2n+1)+e}{2}$ est un entier strictement positif.
   - **b.** Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2+1$ est un carré parfait.

2) Une fonction génératrice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x)=3x+\sqrt{8x^2+1}$.

4. Vérifier que pour tout réel x, on a : $8(f(x))^2+1=(8x+3\sqrt{8x^2+1})^2$.
5. En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.
6. On pose $u_1=6$ et, pour tout $k\geq 1$, $u_{k+1}=f(u_k)$. Montrer que $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.
7. Montrer que pour tout entier $k\geq 2$, $u_{k-1}=3u_k-\sqrt{8u_k^2+1}$.
8. On considère les fonctions g et h définies sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=3x-\sqrt{8x^2+1}$ et $h(x)=3\sqrt{x}-\sqrt{8x+1}$. Montrer que la fonction h est strictement croissante et en déduire que g l'est aussi.
9. On souhaite montrer que tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k\geq 1$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un nombre équilibré qui n'est pas de cette forme. On note alors n le plus petit d'entre eux.

   Calculer u_2. En admettant que les seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont 6 et 35 (ce qu'il serait toujours possible de tester « à la main »), en déduire que $n>u_2$ puis qu'il existe un entier $m\geq 2$ tel que $u_m<n<u_{m+1}$. Conclure.

II) Plus fort ! [National 2023]

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n, avec $n\geq 3$. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenues. On appelle **liste** la suite des numéros ainsi observés. Le nombre n sera appelé **longueur** de la liste.

Par exemple, avec $n=8$, une liste possible est $L=[2,5,7,6,1,8,4,3]$.

Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente. Par exemple avec la liste $L=[2,5,7,6,1,8,4,3]$, le joueur marque 3 points ($2<5$, $5<7$, $1<8$).

On appelle **score** le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1) Quelques exemples

1. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
2. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2) Considérations théoriques

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.
4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.
   - **a.** Montrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k. **b.** Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?
5. On note $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.

3) Une relation de récurrence

6. Déterminer $L_3(0)$, $L_3(1)$ et $L_3(2)$.
7. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
8. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
9. Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 3$, $L_{n+1}(1)=2L_n(1)+nL_n(0)$.
10. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.

III) Nombres sectionnables [National 2022]

On dit qu'un nombre entier est **sectionnable unitaire** s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2. Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3=1+2$ et $10=1+2+3+4$.

On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires. **2.** Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

Un entier est dit **sectionnable** s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Exemple 24 et 25 sont sectionnables car $24=7+8+9$ et $25=12+13$. En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

3. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.
4. Soient k et q des entiers naturels avec $k\geq 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$. Montrer que $2S=k(k+1+2q)$.
5. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.
6. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2. Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n=2^r\times m$.
   - **a.** Déterminer r et m quand $n=56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.
   - **b.** Montrer que 44 est sectionnable.
   - **c.** Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.
7. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

On dit qu'un nombre entier est **uniquement sectionnable** lorsqu'il peut s'écrire de façon unique comme somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

8. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?
9. Lien avec les nombres premiers.
   - **a.** Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k\geq 3$. On peut donc écrire n sous la forme $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, avec q entier positif ou nul. Montrer que n n'est pas un nombre premier.
   - **b.** En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.

IV) Pas mal de têtes [Amériques-Antilles-Guyane 2022]

Trois intrépides chevalières, Clara, Noémie et Violette, ont reçu la mission de débarrasser le pays d'un dragon possédant N têtes.

Elles attaquent le dragon en obéissant aux règles suivantes :

- Lors de chacune de ses attaques, Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une ;
- Lors de chacune de ses attaques, Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux ;
- Lors de chacune de ses attaques, Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois.

Les attaques se déroulent dans l'ordre qu'elles souhaitent, une même chevalière pouvant attaquer plusieurs fois de suite ou s'abstenir. Le nombre de têtes encore en place après chaque attaque doit être un nombre entier. Si une chevalière est dans l'impossibilité de respecter le protocole fixé, elle cesse définitivement de combattre.

1. On donne un nombre entier positif x.
   - **a.** Si le dragon possède $2x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Clara ?
   - **b.** Si le dragon possède $3x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Noémie ?
   - **c.** Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette ?
   - **d.** Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie ?
2. Montrer que si $N=12$, les combattantes peuvent s'organiser et vaincre le dragon.
3. Montrer que si $N=2023$, le dragon survit.

Soit k un entier naturel.

4. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N=8k$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $4(k-1)$.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N=4(4k+1)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $12k$.
6. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N=4(4k+3)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $4k$.

On rappelle que nombre initial de têtes du dragon est N.

7. Montrer que si N est un multiple de 4, alors le dragon peut être vaincu.
8. Montrer que si N est un nombre pair, alors le dragon peut être vaincu.
9. Montrer que si N est un multiple de 3, alors le dragon peut être vaincu.
10. Montrer que si N n'est ni pair ni multiple de 3, alors le dragon survit.